

3^{ème} Journée thématique de la F2M

Approches probabilistes en mécanique

Lundi 3 juillet 2023

Auditorium de la Bibliothèque Georges Perec, Université Gustave Eiffel

9h00 – 9h30	Accueil - Petit déjeuner (salon d'honneur de la Bibliothèque Georges Perec)
9h30 – 10h45	Modèles génératifs et apprentissage probabiliste en mécanique non linéaire
9h30 – 10h00	Probabilistic fracture modelling of steel specimen with spatially random properties: reconstruction of 3D microstructures from 2D measurements via generative Neural Networks and propagation of uncertainties through nonlinear finite element models <i>Régis Kenko (CdM, Mines ParisTech, PSL Univ)</i>
10h00 – 10h45	Probabilistic learning-based statistical metamodel in nonlinear stochastic dynamics for under-observed systems and small data <i>Christian Soize (MSME, Univ Gustave Eiffel)</i>
10h45 – 11h15	Pause café
11h15 – 12h30	Modélisation probabiliste et identification statistique par inférence bayésienne (1/2)
11h15 – 11h40	Uncertainty model and its identification for real-time optimal speed control for high-speed train under constraints <i>Romain Jorge Do Marco (COSYS-IMSE-MSME, Univ Gustave Eiffel)</i>
11h40 – 12h05	Prédiction de la durée de vie restante d'un module de puissance par inférence bayésienne <i>Louis Schuler (LMPS, Univ Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay)</i>
12h05 – 12h30	Modélisation des propriétés élastiques des composites DLF par champs aléatoires gaussiens <i>Armand Touminet (CdM, Mines ParisTech, PSL Univ)</i>
12h30 – 14h00	Pause déjeuner - Buffet (salon d'honneur de la Bibliothèque Georges Perec)
14h00 – 15h15	Quantification d'incertitudes en mécanique des solides et en science des matériaux
14h00 – 14h30	Vers une analyse probabiliste de la fatigue des polycristaux <i>Insaf Echerradi (Navier, ENPC)</i>
14h30 – 15h15	Towards nonparametric metamodeling in multiscale solid mechanics: exploring the potential of bayesian geometric deep learning for random microstructures <i>Pierre Kerfriden (CdM, Mines ParisTech, PSL Univ)</i>
15h15 – 15h45	Pause café
15h45 – 17h00	Modélisation probabiliste et identification statistique par inférence bayésienne (2/2)
15h45 – 16h10	Formulation stochastique des matériaux standards généralisés et aversion au risque <i>Jérémy Bleyer (Navier, ENPC, Univ Gustave Eiffel)</i>
16h10 – 16h35	Quantification statistique de l'identifiabilité de paramètres de comportement et/ou de chargement à partir d'images - application à la modélisation pulmonaire personnalisée <i>Alice Peyraut (LMS, École Polytechnique, IPP, MEDISIM, INRIA)</i>
16h35 – 17h00	Identification de chocs mécaniques par filtrage bayésien <i>Julian Ghibaudo (LMSSC, CNAM)</i>

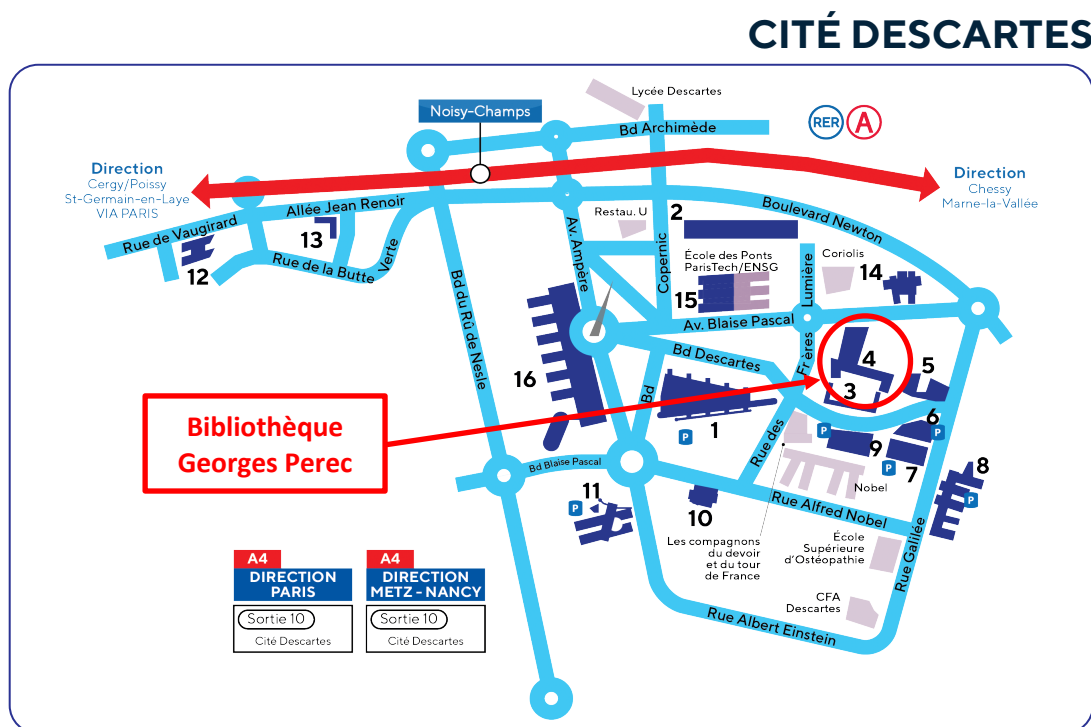
Lieu : Auditorium de la Bibliothèque Georges Perec, Université Gustave Eiffel (voir plan ci-dessous)
rue des Frères Lumière, 77420 Champs-sur-Marne.

Transport :

- Transport en commun : RER A, station Noisy-Champs.
- Voiture : A4, sortie 10, Cité Descartes.

Inscription : La journée est ouverte à tous, l'inscription est gratuite mais obligatoire afin d'aider à la logistique. L'inscription se fait via la page dédiée du site de la F2M-msp, <https://f2m.cnrs.fr/evenements/journees-thematiques/>. Un buffet sera servi à midi dans le salon d'honneur de la bibliothèque Georges Perec.

Plan Cité Descartes :



1. **Bâtiment Copernic** : 5, bd Descartes • Champs-sur-Marne
2. **Bâtiment Bienvenue** : 14-20, bd Newton • Champs-sur-Marne
3. **Maison de l'Étudiant** : rue des Frères Lumière • Champs-sur-Marne
4. **Bibliothèque Georges Perec** : rue des Frères Lumière • Champs-sur-Marne
5. **Gymnase de la Haute Maison** : bd Descartes • Champs-sur-Marne
6. **Bâtiment François Rabelais** : bd Descartes • Champs-sur-Marne
7. **Bâtiment Lavoisier** : rue Galilée • Champs-sur-Marne
8. **Bâtiment Bois de l'Étang** : rue Galilée • Champs-sur-Marne
9. **Bâtiment Clément Ader** : bd Descartes • Champs-sur-Marne
10. **Bâtiment Ada Lovelace - La Centrif** : 2, rue Alfred Nobel • Champs-sur-Marne
11. **IUT de Marne-la-Vallée, site de Champs** : 2, rue Albert Einstein • Champs-sur-Marne
12. **Bâtiment Alexandra David-Néel** : 2, allée du Promontoire • Noisy-le-Grand
13. **Bâtiment Albert Camus** : 2, allée Jean Renoir • Noisy-le-Grand
14. **ÉAV&T** : 12, av. Blaise Pascal • Champs sur Marne
15. **ENSG Géomatique** : 6-8, av. Blaise Pascal • Champs sur Marne
16. **ESIEE Paris** : 2, bd Blaise Pascal • Noisy-le-Grand

Résumés

Modèles génératifs et apprentissage probabiliste en mécanique non linéaire

Probabilistic fracture modelling of steel specimen with spatially random properties: reconstruction of 3D microstructures from 2D measurements via generative Neural Networks and propagation of uncertainties through nonlinear finite element models

Régis Kenko (CdM, Mines ParisTech, PSL University)

Pierre Kerfriden (CdM, Mines ParisTech, PSL University)

L'essai de résilience Charpy est un essai mécanique couramment utilisé par l'industrie nucléaire qui mesure la capacité d'un matériau à dissiper de l'énergie avant de rompre. Des essais récents sur un acier faiblement allié provenant d'une pièce forgée d'essai ont révélé une variabilité significative dans les énergies de rupture et des valeurs anormalement basses. Cette variabilité de la résilience est observée au sein de certaines zones de grandes pièces forgées présentant des hétérogénéités chimiques à l'échelle du millimètre. Il est pressenti que ces hétérogénéités contribuent largement à la variabilité dans les résultats des essais de résilience.

L'objet de notre étude est de comprendre et évaluer l'effet de ces hétérogénéités à l'échelle millimétrique sur la distribution d'énergies de rupture par le biais d'une approche numérique innovante basée sur l'apprentissage profond ainsi que sur une modélisation haute fidélité de la rupture fragile comme présenté sur la Figure 1. Pour ce faire, nous avons mis en place un jumeau numérique des éprouvettes Charpy mésoségrégées. Nous avons généré des champs 3D aléatoires à partir d'images des ségrégations, attribué les propriétés mécaniques locales identifiées par essais de traction et de micro-indentation puis réalisé des simulations de Monte-Carlo en prenant en compte les incertitudes mésoscopiques liées au champ aléatoire et les incertitudes microscopiques liées à la formulation de Beremin [1] utilisée pour modéliser la rupture fragile.

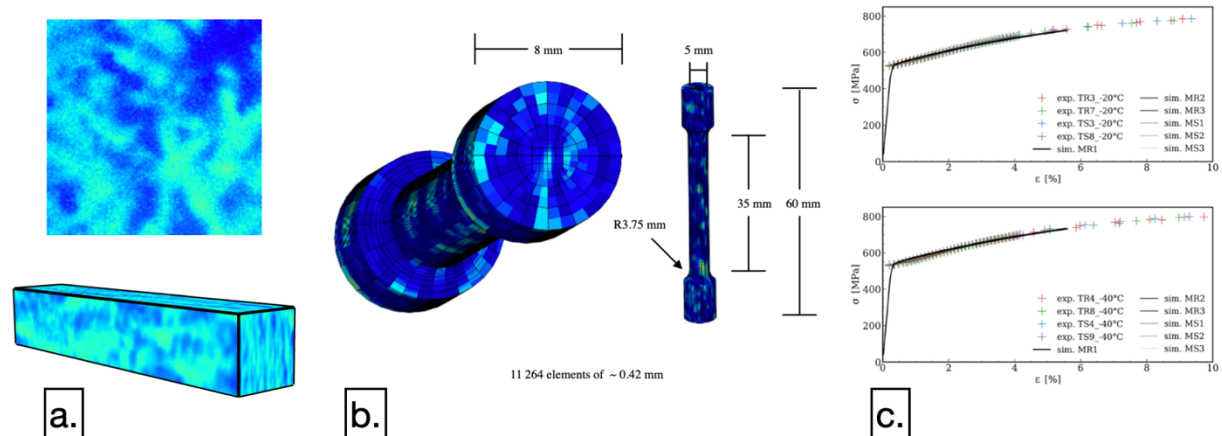


Figure 1: (a.) Macrographie expérimentale 2D de 20x20 mm² et volume synthétique 3D de 55x10x10 mm³ généré par réseau de neurones [2]. (b.) Identification et attribution d'une loi de comportement mésoscopique par niveau de gris à partir de corrélations entre des essais de micro-indentation et la teneur des traceurs de la ségrégation chimique. (c.) Validation de la loi de comportement modélisée en traction.

References

- [1] F.M. Beremin, A. Pineau, F. Mudry, J.-C. Devaux, Y. D'Escatha, P. Ledermann, A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel, *Metallurgical Transactions A*, 14:2277-2287 (1983). doi: [10.1007/BF02663302](https://doi.org/10.1007/BF02663302).
- [2] S. Kench, S.J. Cooper, Generating 3D structures from a 2D slice with GAN-based dimensionality expansion, *Nature Machine Intelligence*, 3:299-305 (2021). arXiv: [arXiv.2102.07708](https://arxiv.org/abs/2102.07708).

Probabilistic learning-based statistical metamodel in nonlinear stochastic dynamics for under-observed systems and small data

Christian Soize (MSME, Université Gustave Eiffel)

We are considering a high-dimension nonlinear computational model of a dynamical system. This model is parameterized by a control parameter, which is a vector. Additionally, there are uncertainties in the system that are represented by another vector-valued parameter, which we refer to as the random uncontrolled parameter. The stochastic response of this computational model is a high-dimensional, time-discretized stochastic process, which depends on the control parameter. A single evaluation of the deterministic computational model is computationally expensive for each set of given control and uncontrolled parameters. The predictions made using the time-discretized stochastic computational model are related to a nonlinear mapping of the stochastic response. This mapping produces a vector-valued random observation that is dependent on the control parameter. In the context of probabilistic updating, we focus on a specific subset of components in the random observation, known as the random identification observation. For this subset, we are provided with a small target dataset. Therefore, the target dataset is associated with a partial observability, which thus corresponds to an incomplete data case. Our objective is to construct a predictive statistical surrogate model, which is defined as a family of updated random observations that are functions of the control parameter. This surrogate model is constructed using a small training dataset and relies on a methodology based on statistical methods. The proposed methodology is an extension of the approach presented in reference [1], incorporating Fourier transform of probability measure techniques [2]. To demonstrate the application of this methodology, we present a case study involving the nonlinear stochastic dynamics of a MEMS device.

References

- [1] C. Soize, R. Ghanem, Probabilistic learning on manifolds constrained by nonlinear partial differential equations from small datasets, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 380:113777 (2021). doi: [10.1016/j.cma.2021.113777](https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113777).
- [2] C. Soize, Probabilistic learning constrained by realizations using a weak formulation of Fourier transform of probability measures, *Computational Statistics*, (2022). doi: [10.1007/s00180-022-01300-w](https://doi.org/10.1007/s00180-022-01300-w).

Modélisation probabiliste et identification statistique par inférence bayésienne (1/2)

Uncertainty model and its identification for real-time optimal speed control for high-speed train under constraints

Romain Jorge Do Marco (COSYS-IMSE-MSME, Université Gustave Eiffel, SNCF, DTIPG, France)

Guillaume Perrin (COSYS-IMSE, Université Gustave Eiffel)

Christine Funfschilling (SNCF, DTIPG)

Christian Soize (MSME, Université Gustave Eiffel)

Today's industry needs predictive models to ensure its performance. This is particularly true for the railway industry, which has one of the highest energy consumption rates. However, the parameters of the model (empty mass, aero-dynamic factors, etc.) are not easy to determine and represent the first source of uncertainty. In addition, the environmental parameters (wind, passenger mass) are neither known nor controllable.

Offline, it is necessary to be able to find the optimal control for a given train (deterministic context) [1] and to know the distribution of each random parameter of the train [2]. Using manifold learning, it might be possible to create grids that could be followed by the driver or for an automatic train operation system.

Online, the parameters may be different, which compromises the optimality of the proposed control. It is therefore necessary to be able to adapt the control in case of unexpected or changing conditions. The entire work is therefore based on a refined approximation of random parameters and epistemic error using real measures.

References

[1] J. Nespoulous, C. Soize, C. Funfschilling, G. Perrin, Optimisation of train speed to limit energy consumption, *Vehicle System Dynamics*, 60(10): 3540-3557 (2022). doi: [10.1080/00423114.2021.1965628](https://doi.org/10.1080/00423114.2021.1965628). hal: [hal-03322908](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03322908).

[2] J. Nespoulous et al., Measurements-based constrained control optimization in presence of uncertainties with application to the driver commands for high-speed trains, Submitted to *Physica D*, (Feb. 15, 2023).

Prédiction de la durée de vie restante d'un module de puissance par inférence bayésienne

Louis Schuler (LMPS, Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay)

Ludovic Chamoin (LMPS, Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, IUF)

Zoubir Khatir (SATIE, Université Gustave Eiffel)

Mounira Berkani (SATIE, UPEC, ENS Paris-Saclay)

Merouane Ouhab (Mitsubishi Electric R&D Centre Europe, MERCE, France)

Les modules de puissance sont des composants essentiels de nombreux systèmes électriques. Au cours de leur utilisation, ils sont traversés par de forts courants qui, par effet Joule, créent des augmentations de température. A cause des différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux du composant, des contraintes thermo-mécaniques initient et propagent des fissures, qui altèrent le fonctionnement du module et mènent à sa dégradation [1].

Dans ce travail, un modèle réduit non-intrusif basé sur la Proper Generalized Decomposition (PGD) [2] est tout d'abord développé avec Ansys pour modéliser le comportement électro-thermo-

mécanique du module, et prédire sa durée de vie. Le modèle tient compte de plusieurs paramètres incertains. Ensuite, une approche de recalage de modèle basée sur l'inférence bayésienne est implémentée, permettant d'obtenir une densité de probabilité des paramètres à l'aide de mesures expérimentales. La densité de probabilité est échantillonnée à l'aide de la méthode des Transport Maps [3] puis propagée à travers le modèle de durée de vie afin d'obtenir une prédiction stochastique de la durée de vie. L'utilisation du modèle réduit et de l'échantillonnage par Transport Maps permet de recalibrer le modèle en temps réel et de prédire la durée de vie restante du module au cours de son utilisation.

References

- [1] N. Dornic, A. Ibrahim, Z. Khatir, S.H. Tran, J.-P. Ousten, J. Ewanchuk, S. Mollov, Analysis of the degradation mechanisms occurring in the topline interconnections of IGBT power devices during power cycling, *Microelectronics Reliability*, 88-90:462-469 (2018). doi: [10.1016/j.microrel.2018.07.041](https://doi.org/10.1016/j.microrel.2018.07.041).
- [2] F. Chinesta, P. Ladevèze, E. Cueto, A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18(4):395 (2011). doi: [10.1007/s11831-011-9064-7](https://doi.org/10.1007/s11831-011-9064-7).
- [3] P-B. Rubio, F. Louf, L. Chamoin, Transport Map sampling with PGD model reduction for fast dynamical Bayesian data assimilation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 120(4):447-472 (2019). doi: [10.1002/nme.6143](https://doi.org/10.1002/nme.6143).

Modélisation des propriétés élastiques des composites DLF par champs aléatoires gaussiens

Armand Touminet (CdM, Mines ParisTech, PSL University)

Sabine Cantournet (CdM, Mines ParisTech, PSL University)

Victor Fabre (CdM, Mines ParisTech, PSL University, Research and Innovation Centre, Hutchinson SA)

Pierre Kerfriden (CdM, Mines ParisTech, PSL University)

Les approches usuelles de modélisation des composites à fibres discontinues (DLFs) se basent sur des méthodes micromécaniques et des représentations microstructurales simplifiées. Dans cette présentation, on s'intéresse à l'utilisation de champs aléatoires gaussiens pour représenter les propriétés élastiques des DLFs, ainsi que leur variabilité. Nous présentons d'abord les motivations de cette approche en mettant en évidence la variabilité du matériau aux échelles mésoscopiques et macroscopiques, vis-à-vis des propriétés morphologiques des différentes phases. Nous construisons alors une représentation du tenseur élastique adaptée au matériau dont la variabilité spatiale est modélisée par des champs aléatoires gaussiens. Plus précisément, il s'agit d'une paramétrisation du tenseur élastique par un nombre réduit de variables, appelés descripteurs géométriques, liés au tenseur élastique via un modèle de raideur construit de façon à représenter correctement l'anisotropie du matériau. Nous proposons une interprétation géométrique des descripteurs ainsi construits et faisons le lien avec les grandeurs d'intérêt en imagerie non-destructive. Cette approche permet notamment d'échantillonner aléatoirement un ensemble de descripteurs géométriques afin d'aboutir à un matériau synthétique. Les propriétés statistiques des matériaux synthétiques générés dépendent de la fonction de corrélation utilisée pour échantillonner ces descripteurs, dont les paramètres doivent être identifiés pour les matériaux à l'étude. À cet effet, une méthode d'identification de ces paramètres à partir d'essais de corrélation d'images numériques (DIC) est proposée. Cette approche est formulée comme un problème inverse Bayésien hiérarchique, où les descripteurs géométriques sont les inconnues du problème. La formulation Bayésienne hiérarchique permet notamment d'aboutir à une estimation des paramètres de la fonction de corrélation associée

aux descripteurs identifiés, et donc d'identifier les paramètres du générateur synthétique. Nous évaluons la pertinence de l'approche proposée en évaluant le résidu de déplacement identifié dans l'approche inverse.

Quantification d'incertitudes en mécanique des solides et en science des matériaux

Vers une analyse probabiliste de la fatigue des polycristaux

Insaf Echerradi (Navier, ENPC)

Michael Peigney (Navier, ENPC)

Le phénomène de fatigue dans les polycristaux métalliques présente un caractère probabiliste qui se manifeste notamment par une grande dispersion des résultats expérimentaux lors d'essais cycliques. Ce caractère probabiliste provient en partie de la variabilité des microstructures. L'initiation de la fatigue dépend en effet de la disposition géométrique précise des grains, or la microstructure n'est en général connue qu'à travers des informations statistiques (taille moyenne des grains, fonction d'orientation de distribution par exemple). Pour prédire la densité de probabilité correspondant à la durée de vie en fatigue, il faudrait en principe effectuer un grand nombre de simulations en champ complet correspondant à différentes réalisations de microstructures, ce qui engendre un coût de calcul important si on utilise des approches par éléments finis en plasticité cristalline.

Dans cet exposé, on présente une méthode simplifiée pour estimer la durée de vie de polycristaux, dans le cadre de la fatigue à grand nombre de cycles. Cette méthode repose sur la minimisation de l'énergie incrémentale constituée de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie dissipée par glissement plastique. Cette méthode est très rapide en temps de calcul, et rend ainsi possible la construction de courbes de Wohler probabilistes obtenues par le tirage aléatoire d'un grand nombre de microstructures. Des résultats numériques sur la durée de vie de stent endovasculaire sont présentés à titre d'illustration.

Towards nonparametric metamodeling in multiscale solid mechanics: exploring the potential of bayesian geometric deep learning for random microstructures

Pierre Kerfriden (CdM, Mines ParisTech, PSL University)

In this talk, I propose to give an overview of the recent deep learning surrogate modelling methodology developed in our group to build multiscale surrogate models for stress analysis in random microstructures, i.e. accelerate repeated and expensive spatially detailed simulations by making use of appropriate regression algorithms. Specifically, our approach is to solve coarse scale equations online, and correct the resulting solutions using (graph) convolutional neural networks. In this way, the corrections may only be performed locally, allowing us to deploy efficient networks with relatively low receptive field size. Our networks are Bayesian, which is important to deploy methods of active learning whereby only the most meaningful direct numerical simulations are to be performed to build the surrogate model. Moreover, such a probabilistic setting is a powerful tool to take into account some of the equations of physics at inference stage, using standard data assimilation tools. I will report the results that we obtained when employing such an approach to predict stress fields in porous structures with random distributions of pores. I will also provide some insights regarding the advantages and limitations of deep learning technologies compared to traditional surrogate modelling approaches.

Modélisation probabiliste et identification statistique par inférence bayésienne (2/2)

Formulation stochastique des matériaux standards généralisés et aversion au risque

Jérémy Bleyer (Navier, ENPC, Université Gustave Eiffel)

Ce travail propose un cadre théorique du comportement thermodynamique de matériaux standards généralisés, dans un cadre stochastique. En s'appuyant sur la théorie de l'optimisation stochastique, la prise en compte de l'espérance de l'énergie libre et du pseudo-potentiel de dissipation permet de formuler un comportement standard généralisé moyen, possédant donc de bonnes propriétés sur le plan thermodynamique. Dans un deuxième temps, nous remplaçons l'espérance par une mesure averse au risque, permettant d'obtenir des estimations optimistes et pessimistes du comportement aléatoire du matériau. Pour cela, nous nous reposons sur la valeur à risque conditionnelle (Conditional Value-at-Risk - CVaR), une mesure de risque très populaire en mathématiques financières.

Quantification statistique de l'identifiabilité de paramètres de comportement et/ou de chargement à partir d'images - application à la modélisation pulmonaire personnalisée

Alice Peyraut (LMS, École Polytechnique, IPP, MEDISIM, INRIA)

Martin Genet (LMS, École Polytechnique, IPP, MEDISIM, INRIA)

La fibrose pulmonaire idiopathique (FPI) est une maladie pulmonaire interstitielle dont les mécanismes d'apparition et d'évolution sont encore mal compris mais potentiellement liés à l'état mécanique du tissu. Un outil de type « jumeau numérique », fusionnant un modèle physique du poumon et des données patients - typiquement, des scanners - présente dès lors un intérêt certain pour les cliniciens. Un tel modèle pourrait en effet se révéler particulièrement précieux pour le diagnostic, la classification, le pronostic ou la caractérisation de traitements potentiels de la FPI.

Afin de répondre à cette problématique, l'équipe M3DISIM (École Polytechnique/INRIA) a récemment développé un modèle poromécanique du poumon et de la respiration [1], ainsi qu'une procédure de personnalisation du modèle à partir d'images cliniques [2]. L'un des enjeux principaux de l'étape de personnalisation est alors l'identification, via un problème inverse, des différents paramètres intervenant dans les lois constitutives et les chargements définis. Une véritable validation expérimentale de cette identification étant délicate, nous avons développé une analyse statistique permettant de caractériser l'impact d'erreurs de modèle et de mesure sur l'estimation des paramètres.

Dans cette présentation, nous décrirons rapidement le modèle pulmonaire et la procédure d'estimation, puis nous nous concentrerons sur la méthode statistique de quantification de l'identifiabilité et présenterons quelques résultats de validation et d'application en pneumologie.

References

- [1] C. Patte, M. Genet, D. Chapelle, A quasi-static poromechanical model of the lungs, *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 21(2):527-551 (2022). doi: [10.1007/s10237-021-01547-0](https://doi.org/10.1007/s10237-021-01547-0).
- [2] C. Laville, C. Fetita, T. Gille, P.Y. Brillet, H. Nunes, J.F. Bernaudin, M. Genet, Comparison of optimization parametrizations for regional lung compliance estimation using personalized pulmonary poromechanical modeling, *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 1-13 (2023). doi: [10.1007/s10237-023-01691-9](https://doi.org/10.1007/s10237-023-01691-9).

Identification de chocs mécaniques par filtrage bayésien

Julian Ghibaudo (LMSSC, CNAM)

Mathieu Aucejo (LMSSC, CNAM)

Olivier De Smet (LMSSC, CNAM)

Les impacts mécaniques peuvent générer de hauts niveaux de vibrations dans les structures, pouvant engendrer des défaillances. La connaissance des actions mécaniques locales est donc nécessaire au bon dimensionnement de ces structures. Cependant, des contraintes comme l'inaccessibilité de la mesure aboutissent à considérer le problème de reconstruction d'effort comme un problème inverse. Parmi les méthodes existantes (régularisation [1], réseaux neuronaux, ...), les approches par filtre de Kalman [2] sont des approches peu coûteuse en ressources et robuste pour résoudre le problème d'identification de force dans le domaine temporel.

Beaucoup de filtres sont aujourd'hui proposés dans la littérature [3, 4, 5]. Or, ces différentes formulations peuvent, dans les faits, être unifiées sous une unique vision bayésienne. En s'appuyant sur cette formulation unifiée des approches par filtre de Kalman, il est possible d'utiliser d'autres ensembles d'hypothèses et ainsi obtenir des approches nouvelles et originales. Ainsi, différentes approches favorisant la parcimonie spatiale de l'action mécanique à identifier seront présentées au cours de cette communication. En introduisant dans la formulation du problème des informations a priori sur la distribution spatiale du champ d'excitation, les filtres développés [6] s'inspirent de ceux de la littérature tout en limitant leur principal défaut : le phénomène de dérive, appelé généralement « drift », au cours duquel l'estimation diverge par rapport à la force réellement à identifier. Des validations numériques et expérimentales sur plaque sont réalisées, permettant la comparaison des nouvelles méthodes avec celles de la littérature dans le cadre d'une application réelle. Les résultats alors obtenus montrent une robustesse à la densité de capteurs ainsi qu'au bruit de mesure.

References

[1] A. N. Tikhonov, Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, *Soviet Mathematics*, 4:1035-1038 (1963).

[2] R. E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82:35-45 (1960). doi: [10.1115/1.3662552](https://doi.org/10.1115/1.3662552).

[3] S. Gillijns, B. D. Moor, Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feedthrough, *Automatica*, 43:934-937 (2007). doi: [10.1016/j.automatica.2006.11.016](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.11.016).

[4] E. Lourens, E. Reynders, G. D. Roeck, G. Degrande, G. Lombaert, An augmented Kalman filter for force identification in structural dynamics, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 27:446-460 (2012). doi: [10.1016/j.ymssp.2011.09.025](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2011.09.025).

[5] S. Eftekhari Azam, E. Chatzi, C. Papadimitriou, A dual kalman filter approach for state estimation via output-only acceleration measurements, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 60-61:866-886 (2015). doi: [10.1016/j.ymssp.2015.02.001](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.02.001).

[6] J. Ghibaudo, M. Aucejo, O. De Smet, A sparse adaptive bayesian filter for input estimation problems, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 180:109416 (2022). doi: [10.1016/j.ymssp.2022.109416](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109416).